

MECANIQUE DES STRUCTURES

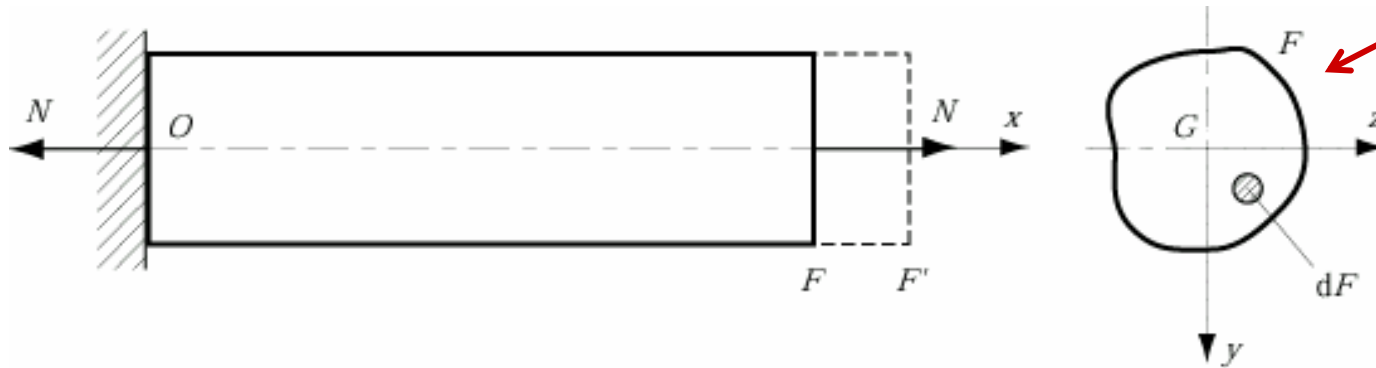
Chapitre 2: traction ou compression simple

préparé par

John BOTSIS, Professeur LMAF/STI/EPFL

traction ou compression simple

La section d'un solide travaille en traction simple quand le torseur des efforts intérieurs se réduit à une composante N

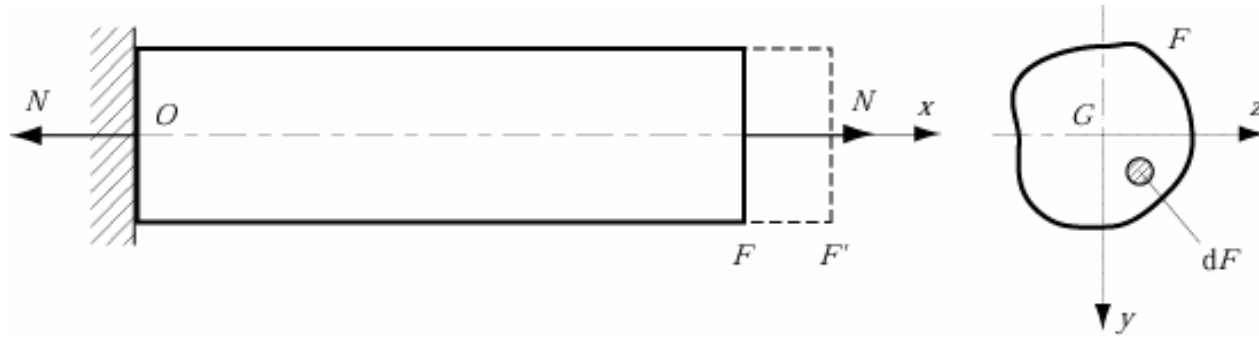


Le calcul des contraintes est facile si l'on admet les hypothèses suivantes

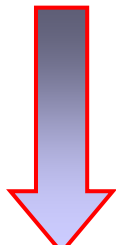
- le solide est prismatique, une section normale F étant invariable selon l'axe x ;
 - la section F' après déformation se déduit de F par simple translation selon l'axe x .
- la seconde condition implique que l'**hypothèse de Bernoulli** soit satisfaite, à savoir

qu'une section plane avant déformation reste plane après déformation.

traction ou compression simple



Pour que l'hypothèse de Bernoulli soit satisfaite :

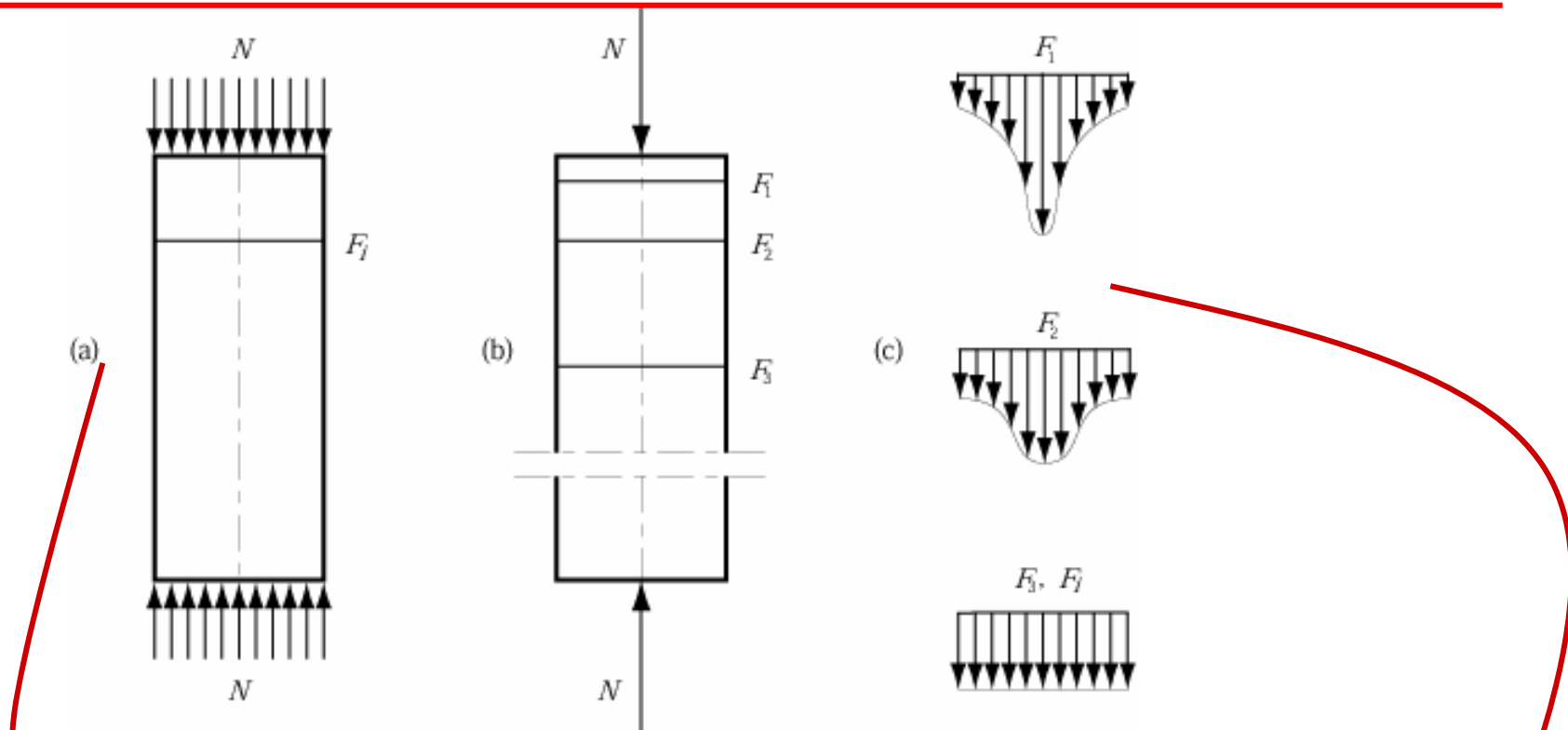

 $\tau_y = \tau_x = 0$
 $\sigma = \text{const.}$

$$\left. \begin{aligned}
 N &= \iint_F \sigma dF \\
 0 &= \iint_F \tau_y dF \\
 0 &= \iint_F \tau_z dF \\
 0 &= \iint_F (\tau_z y - \tau_y z) dF \\
 0 &= \iint_F \sigma z dF \\
 0 &= -\iint_F \sigma y dF
 \end{aligned} \right\} = 0$$

$\xrightarrow{\text{red arrow}} N = \iint_F \sigma dF = \sigma F$

$\sigma = \frac{N}{F}$

distribution des contraintes : Principe de St-Venant

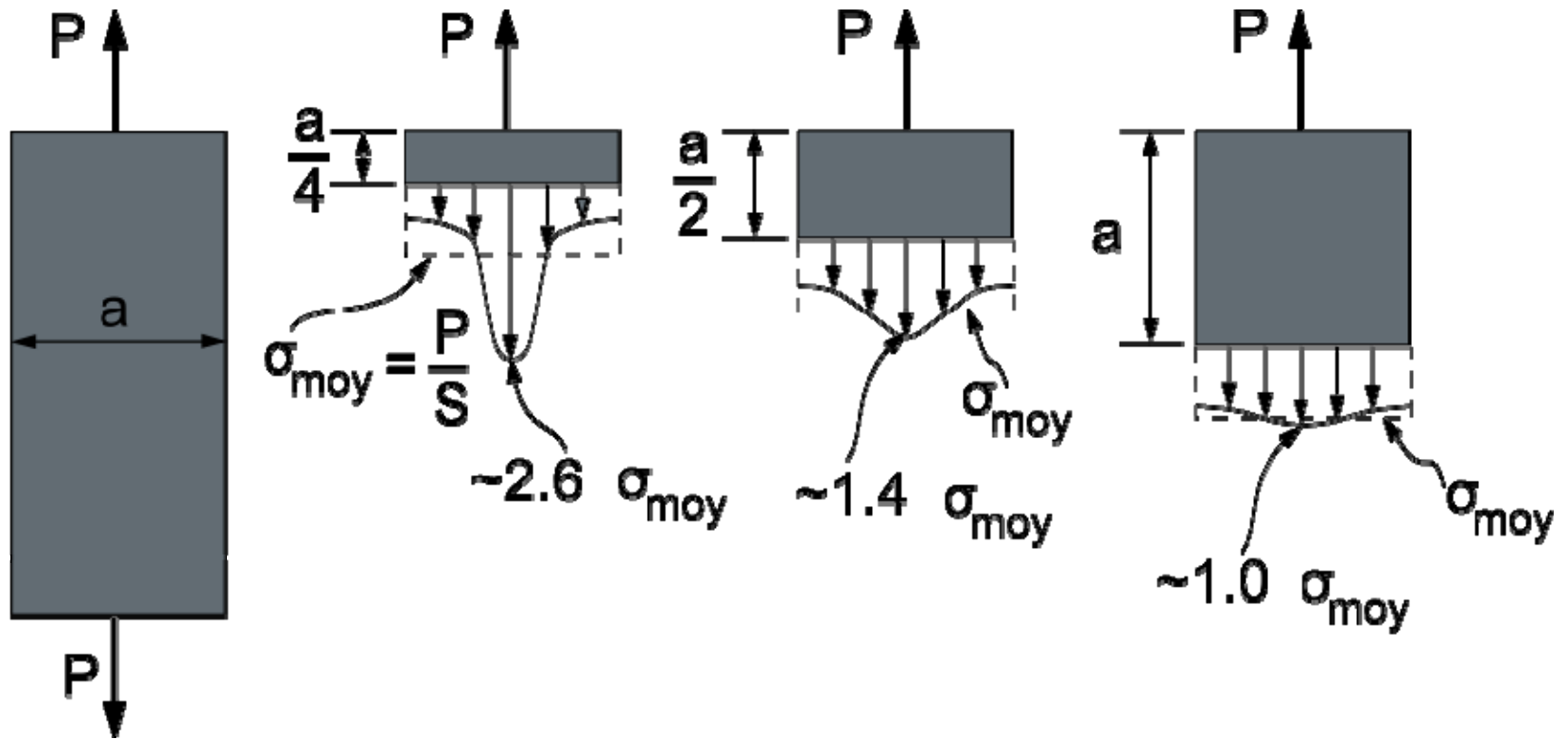


la contrainte σ est constante dans toute section d'un barreau si la force extérieure s'applique uniformément sur les extrémités

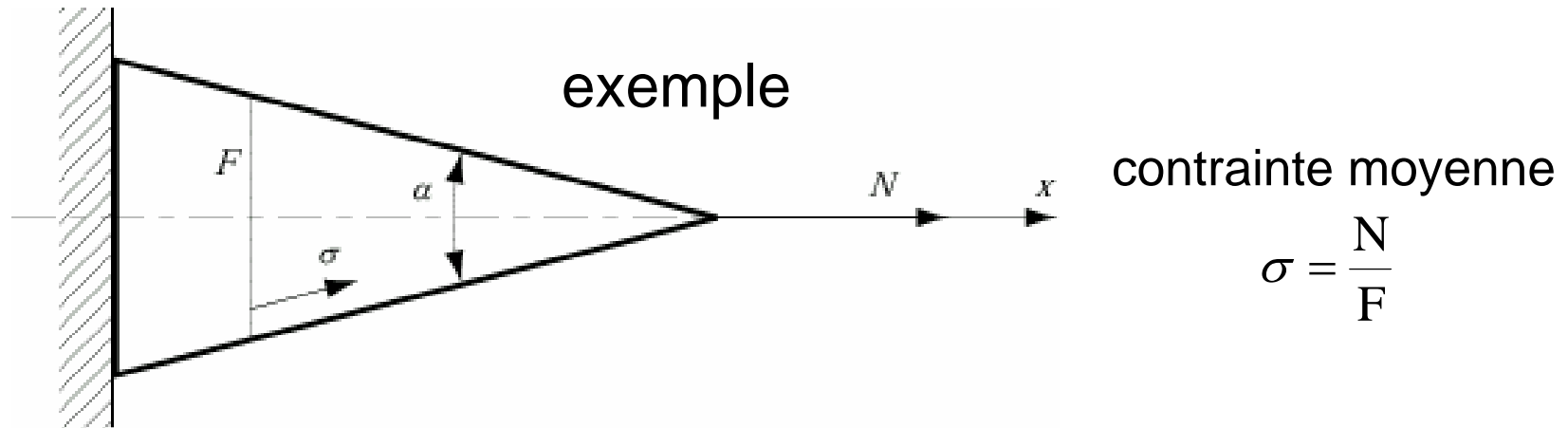
Si non : la section doit se trouver à une certaine distance des extrémités pour que l'hypothèse adoptée soit valable dans le cas d'une force concentrée.

 **principe de St-Venant** 4

distribution des contraintes : Principe de St-Venant



distribution des contraintes : effet de la section



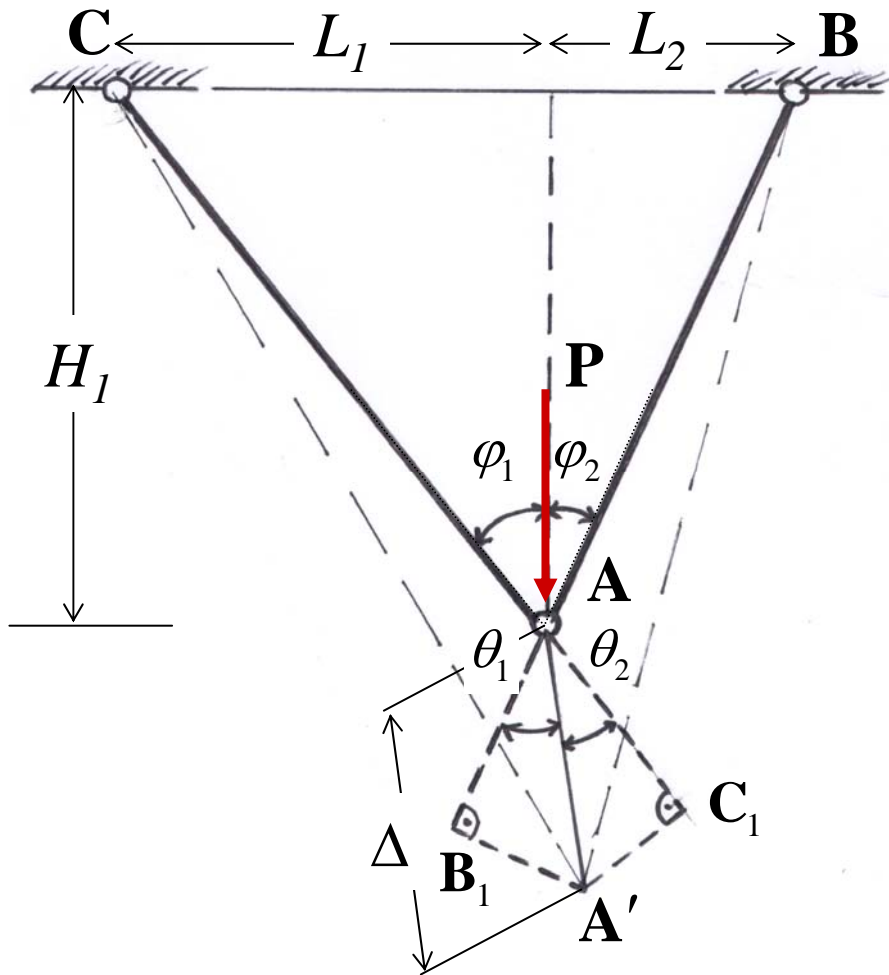
D'après la théorie de l'élasticité la différence relative entre la contrainte maximale réelle et $\sigma = N/F$ est

- pour $\alpha = 10$ deg. erreur relative de 1,3 %;
- pour $\alpha = 30$ deg. erreur relative de 13 %.

Attention

Quand la contrainte σ n'est plus constante dans toute la section, il apparaît des contraintes tangentielles même si l'effort tranchant \mathbf{T} et le moment de torsion M_t sont nuls.

exemple: chargement mécanique



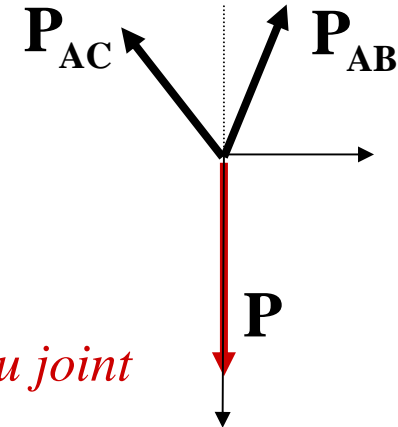
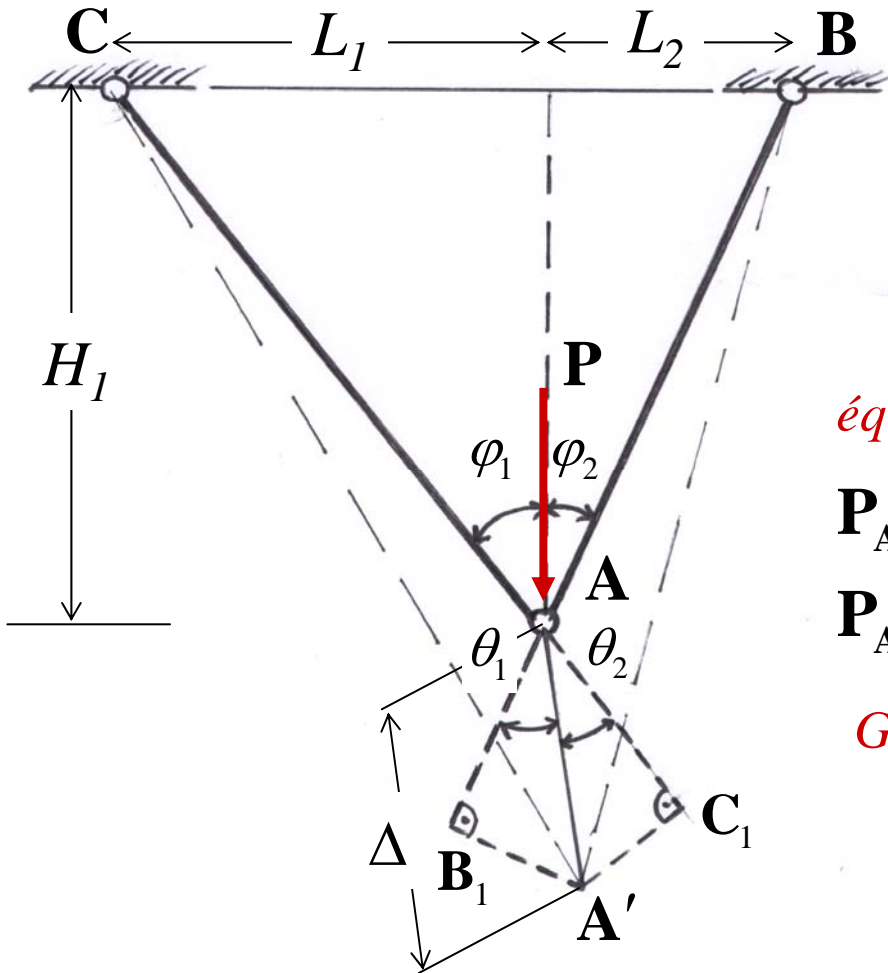
Configuration initiale ABC
Configuration finale $A'BC$

Données du problème

$L_1; L_2; H_1; E; F$

$\varphi_1; \varphi_2; P$

exemple: chargement mécanique



équilibre du joint

$$P_{AC} \cos \varphi_1 + P_{AB} \cos \varphi_2 = P$$

$$P_{AC} \sin \varphi_1 = P_{AB} \sin \varphi_2$$

Géométrie de la déformation

$$AB_1 = \Delta \cos \theta_1; \quad AC_1 = \Delta \cos \theta_2$$

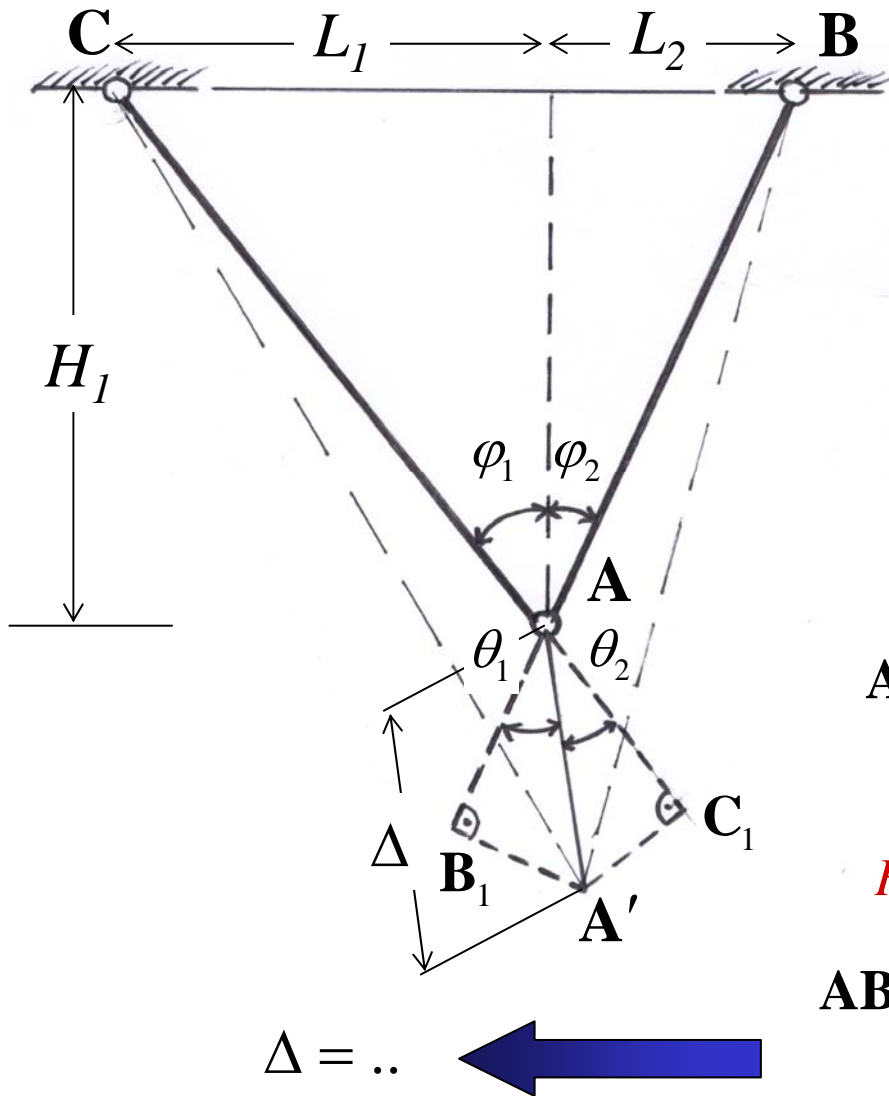
$$\theta_1 + \theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Relation entre déformation - charge

$\Delta = ..$ ←

$$AB_1 = \frac{P_{AB}}{FE} \frac{L_2}{\sin \varphi_2}; \quad AC_1 = \frac{P_{AC}}{FE} \frac{L_1}{\sin \varphi_1}$$

exemple: chargement thermique



Configuration initiale **ABC**

Configuration finale **A'BC**

Données du problème

$$L_1; L_2; H_1 \quad \varphi_1; \varphi_2; \Delta T$$

Solution

Géométrie de la déformation

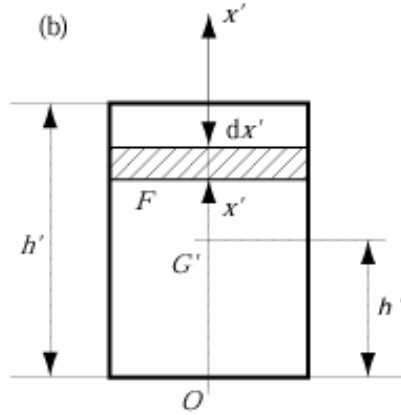
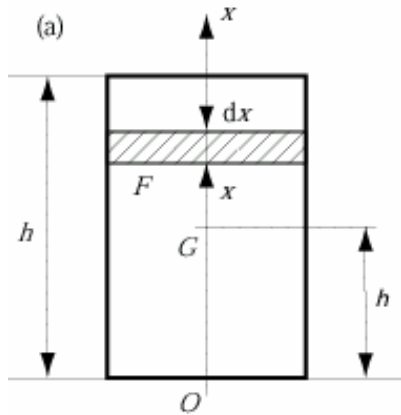
$$AB_1 = \Delta \cos \theta_1; \quad AC_1 = \Delta \cos \theta_2$$

$$\theta_1 + \theta_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

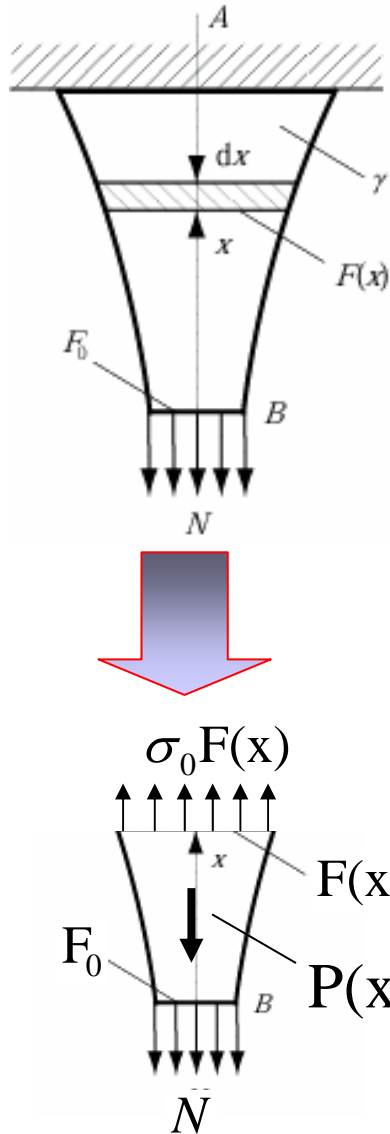
Relation entre déformation - charge

$$AB_1 = \frac{L_2}{\sin \varphi_2} \alpha \Delta T; \quad AC_1 = \frac{L_1}{\sin \varphi_1} \alpha \Delta T$$

examples



exemples



Équilibre $\rightarrow \sigma_0 F(x) = N + P(x)$

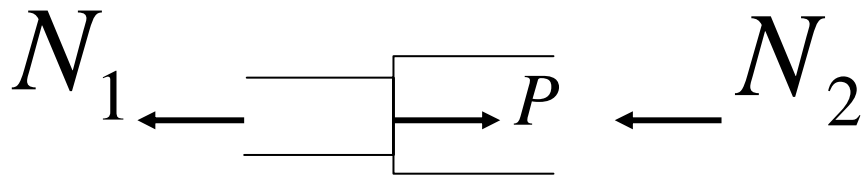
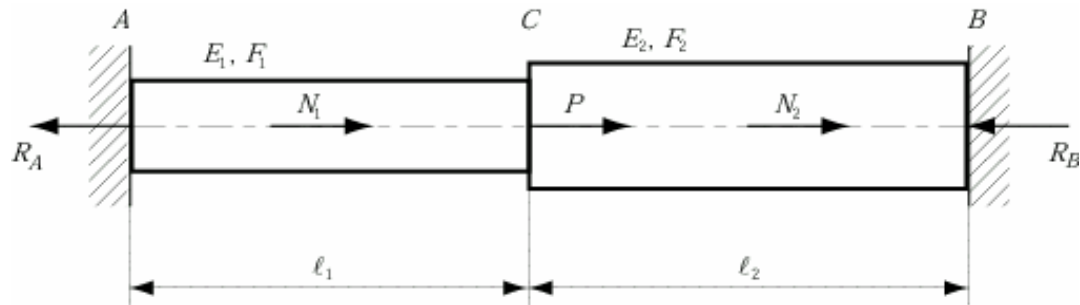
dérivation $\rightarrow \sigma_0 dF(x) = dP(x)$

$$dP(x) = \gamma F(x) dx$$

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{\sigma_0} dx$$

solution $\rightarrow F(x) = F_0 e^{\gamma x / \sigma_0}$

exemples

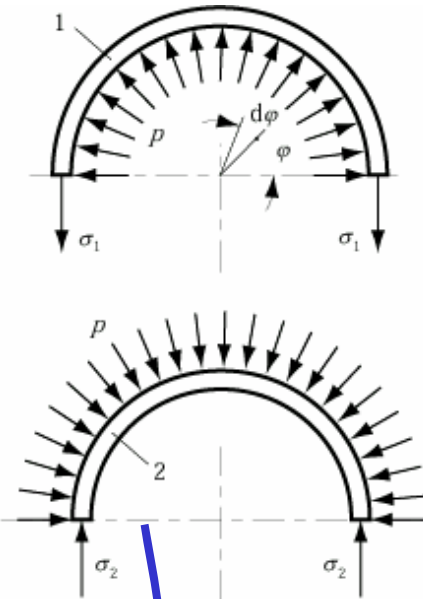
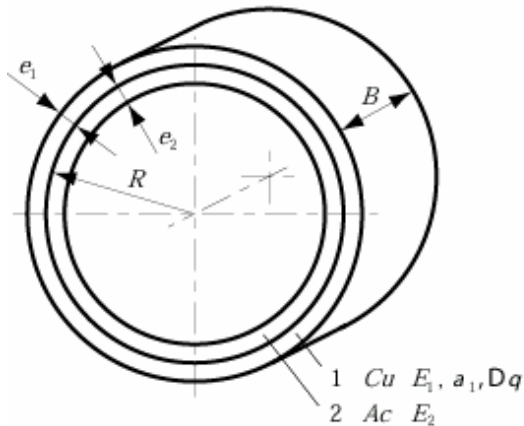


équilibre $N_1 + N_2 = P$

déformation $\delta_c = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 F_2}$

$N_1 ; N_2$

exemples



équilibre

anneau de cuivre

$$2e_1 B \sigma_1 = 2 \int_0^{\pi/2} (p \sin \phi) dF$$

$$dF = B(Rd\phi)$$

$$2e_1 B \sigma_1 = 2pRB \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi$$

$$2e_1 B \sigma_1 = 2pRB$$

$$e_1 \sigma_1 = pR$$

anneau d'acier

$$e_2 \sigma_2 = pR$$

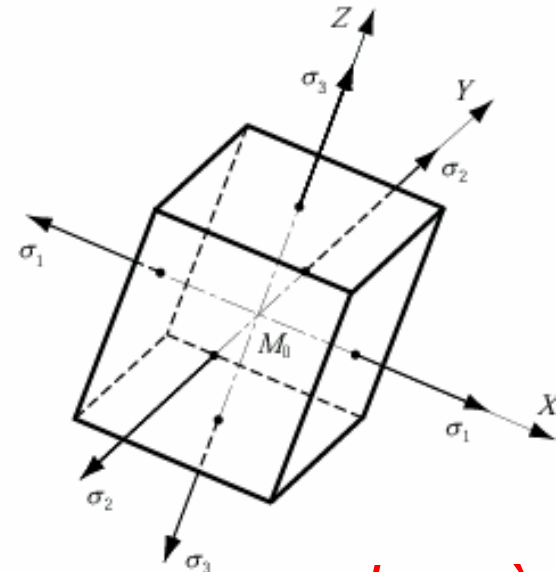
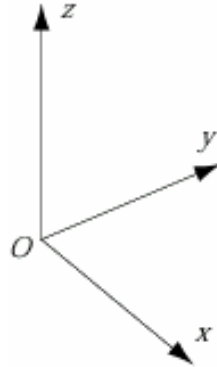
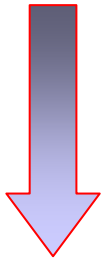
équilibre

condition de déformation

$$\Delta \ell = \pi \Delta R = \underbrace{\pi R \Delta \theta \alpha_1}_{\text{Cu}} - \underbrace{\pi R \frac{\sigma_1}{E_1}}_{\text{Ac}} = \pi R \frac{\sigma_2}{E_2}$$

contraintes principales

Dans le cas tri-dimensionnel,
autour d'un point M_0
quelconque d'un solide



il existe toujours au moins trois plans normaux deux à deux sur lesquels les contraintes tangentielles sont nulles et les contraintes normales extrémales.

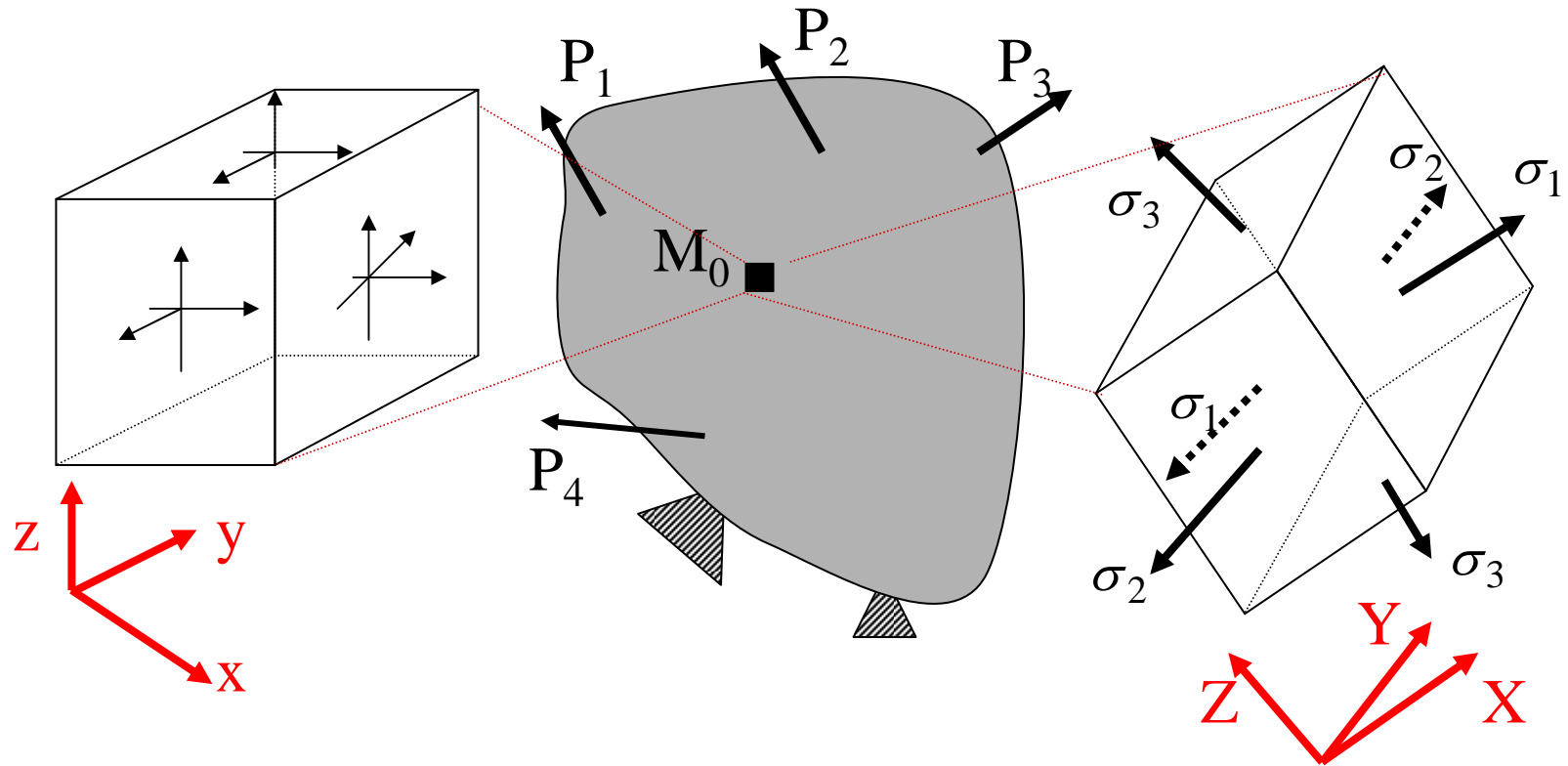
De tels plans sont appelés

plans principaux

et les axes correspondants

axes principaux ou directions principales

contraintes principales

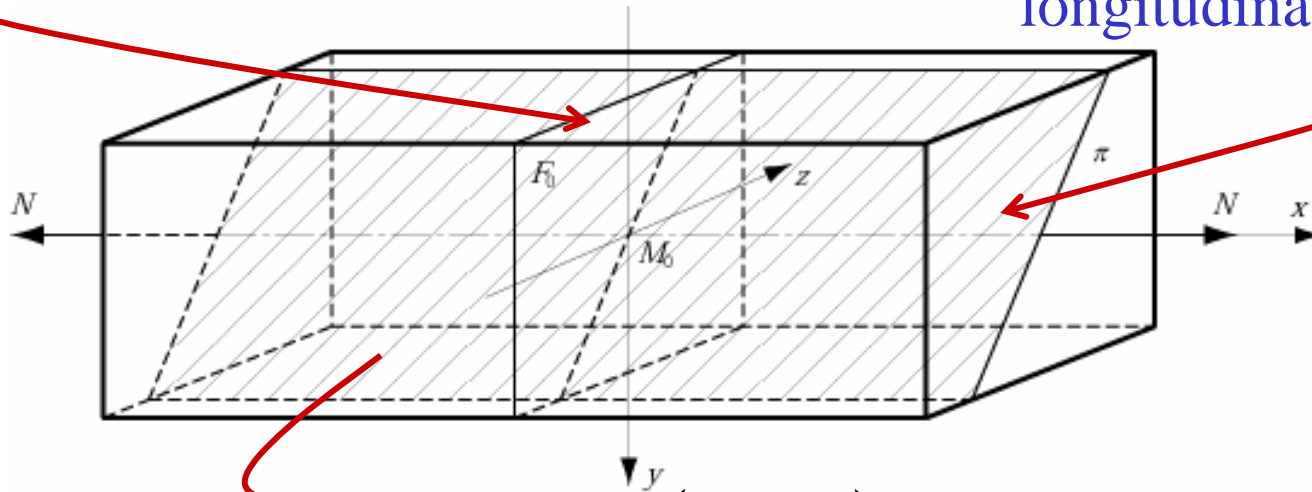


état de contrainte mono-dimensionnel

En tout point de F_0 la contrainte est

$$\sigma_x = N / F_0$$

plan π passant par l'axe longitudinal de la poutre

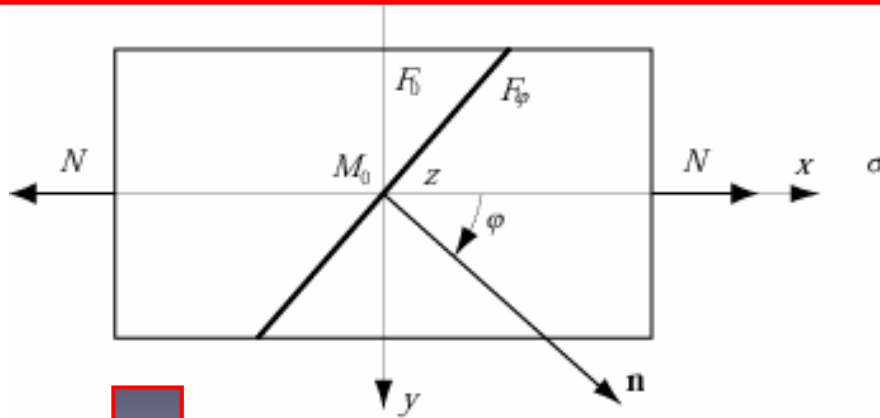


$$\tau = 0 \quad (\sigma = 0)$$

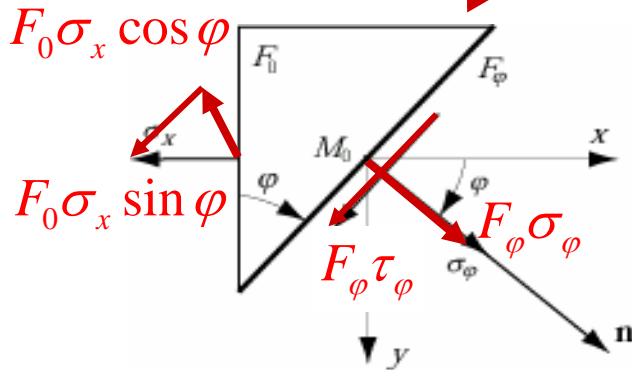
➡ plan π est toujours une plan principal

➡ plans principaux : M_0xy ; M_0xz ; M_0yz

état de contrainte mono-dimensionnel



équilibre des forces selon la direction n
et selon la direction orthogonale



$$F_\phi \sigma_\phi - F_0 \sigma_x \cos \phi = 0$$

$$F_\phi \tau_\phi + F_0 \sigma_x \sin \phi = 0$$

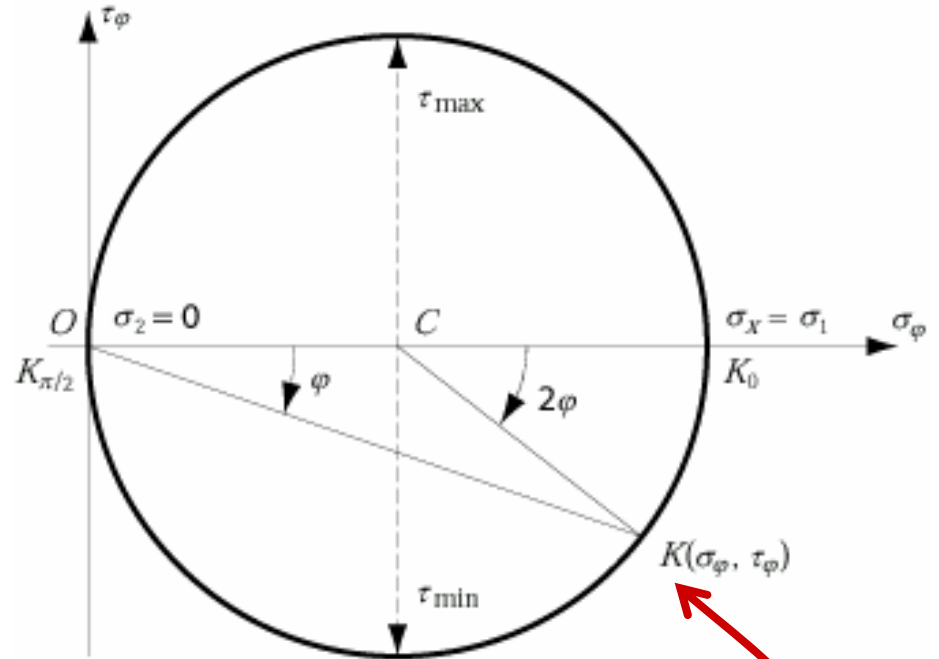
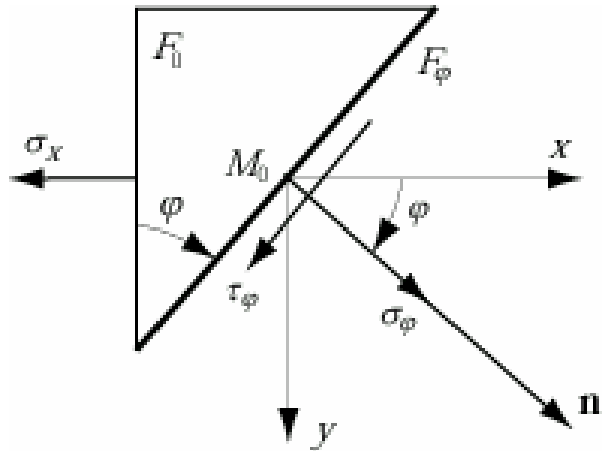
$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos^2 \phi$$

$$\tau_\phi = -\sigma_x \cos \phi \sin \phi$$

Etant donné que

$$F_\phi = F_0 / \cos \phi$$

état de contrainte mono-dimensionnel



$$\sigma_\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

$$\tau_\varphi = -\sigma_x \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$$

contrainte de cisaillement

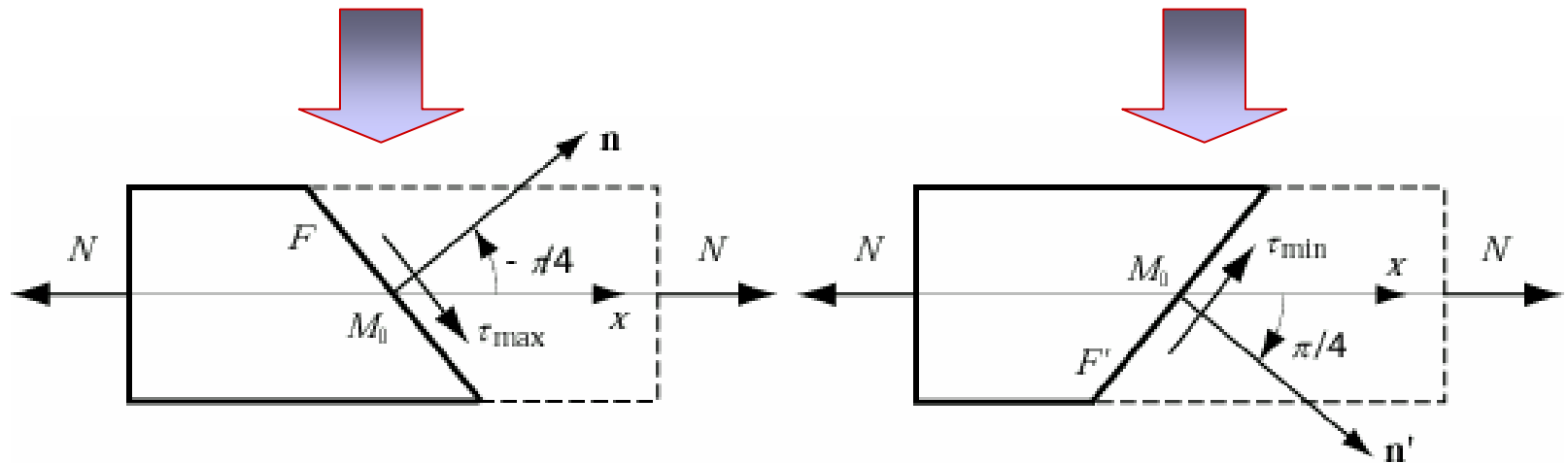
$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau_{\varphi} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$$

Pour $2\varphi = \pm\pi/2$

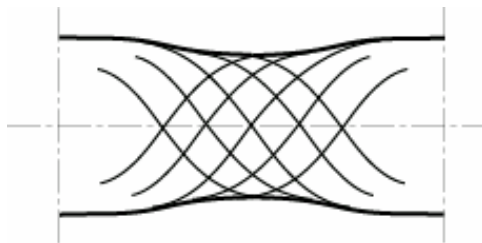
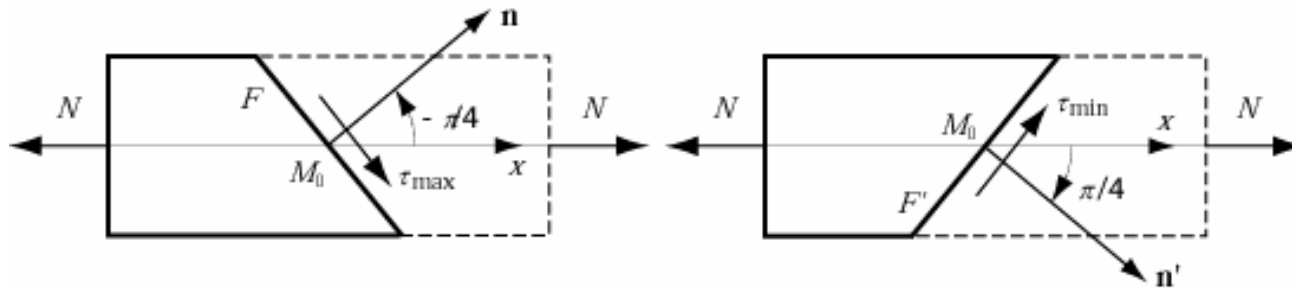
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\tau_{\min} = -\frac{\sigma_x}{2}$$



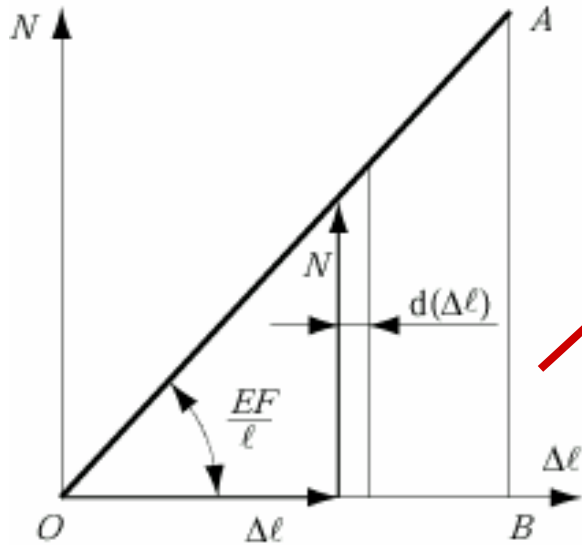
contrainte de cisaillement

Effet de cisaillement sur certains matériaux ductiles



pour les aciers doux, on constate l'apparition de stries qui sont appelées *lignes de Lüder*

énergie de déformation



$$U = \int_0^{\Delta\ell} dU = \int_0^{\Delta\ell} N d(\Delta\ell)$$

Loi de Hooke

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EF}$$

$$U = \frac{EF}{\ell} \frac{(\Delta\ell)^2}{2}$$

$$U = \frac{N\Delta\ell}{2}$$

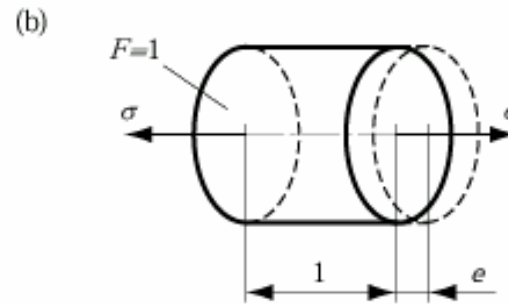
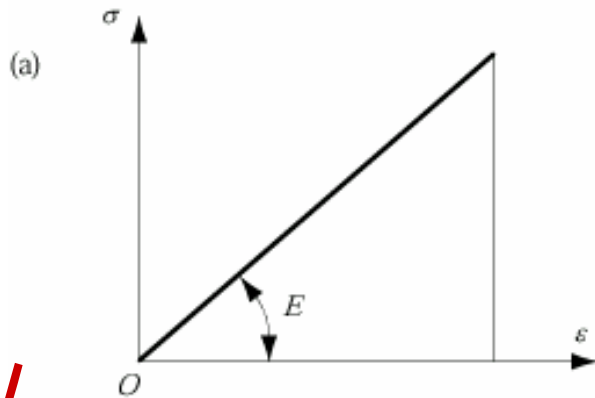
$$U = \frac{N^2\ell}{2EF}$$

$$U = \frac{EF}{\ell} \int_0^{\Delta\ell} \Delta\ell d(\Delta\ell)$$

Si N ou F sont variables

$$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EF} dx$$

densité d'énergie de déformation



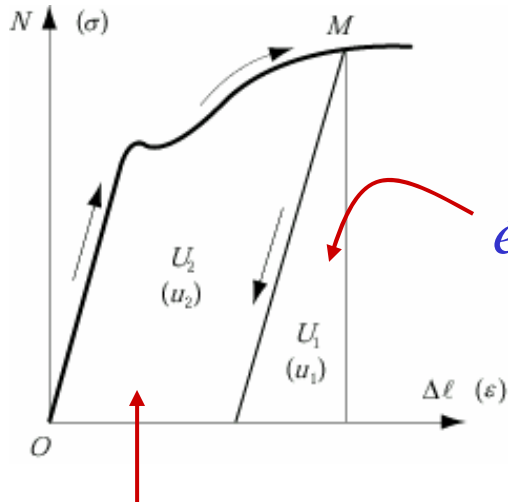
$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad \text{Loi de Hooke}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$$

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

énergie de déformation : domaine plastique



énergie plastique

énergie élastique

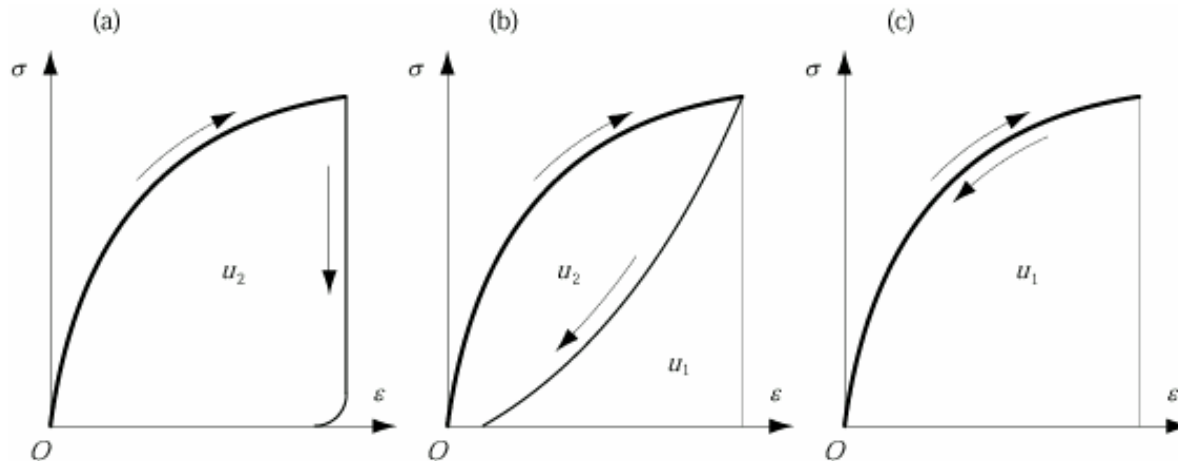
énergie totale

$$U = U_1 + U_2$$

degré d'élasticité $\lambda = \frac{U_1}{U}$

$\lambda = 0$	parfaitement plastique
$\lambda = 1$	parfaitement élastique

énergie de déformation: cas non-linéaire



les densités d'énergie de déformation correspondant à
un matériau plastique parfait ($\lambda = 0$),
un matériau plastique ordinaire ($0 < \lambda < 1$)
un matériau élastique non linéaire ($\lambda = 1$)